

前言

一、编写背景

本书为中国政府奖学金生专用教材——《数学》（第2版）的配套练习用书，适用于来华学习相关专业的预科生，旨在提高学生的数学水平，使学生具备进入高校学习专业前所必需的数学知识技能，掌握数学专业词汇和常用句式，为顺利完成中国大学本科专业学习打下坚实的基础。

鉴于来华预科生多为汉语零基础水平，加之《数学》（第2版）教材为兼顾知识的全面性和系统性，大部分篇幅是对数学知识的讲解，语言表述相对较难，并且练习题数量相对较少，学生在实际使用中得到的练习强度相对较低。因此，为解决上述问题，我们特别编写了这样一本精讲精练，来整合知识体系，完善教学辅导材料。

二、编写理念

1. 本书将《数学》（第2版）教材中的重要知识点进行简化、提炼和总结，按照基础知识—例题—练习的顺序进行编排。每章开始为本章知识点结构图，可以帮助学生理顺知识点，使其条理清晰，可以帮助学生抓住学习内容的重难点，构建数学知识框架，加深学生理解。

2. 本书遵循精讲多练的原则，立足预科数学教学大纲，对《数学》（第2版）教材进行了扩展和补充。例题讲解简单易懂，能够培养学生举一反三的能力；每一节的练习题题型种类多，内容丰富；本书在每章最后专门为学生设置了自测题环节，能够着重训练学生的读题能力及解题能力，从而帮助学生构建完整的数学能力体系。

3. 本书涵盖了预科数学教学大纲中A、B、C类知识点的内容，其中A、B类知识点是学生必须掌握的，C类知识点是选学内容，为学生进入大学数学课程的学习起到了铺垫与衔接的作用，这部分内容可以让学生自主学习。

目 录

第一章 集合	1
1.1 集合的定义	1
1.2 集合间的关系	3
1.3 集合间的运算	5
自测题	9
第二章 不等式	11
2.1 不等式的性质	11
2.2 不等式的解法	13
自测题	19
第三章 函数	22
3.1 平面直角坐标系	22
3.2 函数的概念	25
3.3 函数的单调性	29
3.4 函数的奇偶性	31
3.5 反函数	33
3.6 幂函数	36
3.7 指数函数	39
3.8 对数与对数函数	42
自测题	46
第四章 三角函数	51
4.1 角的定义及弧度	51

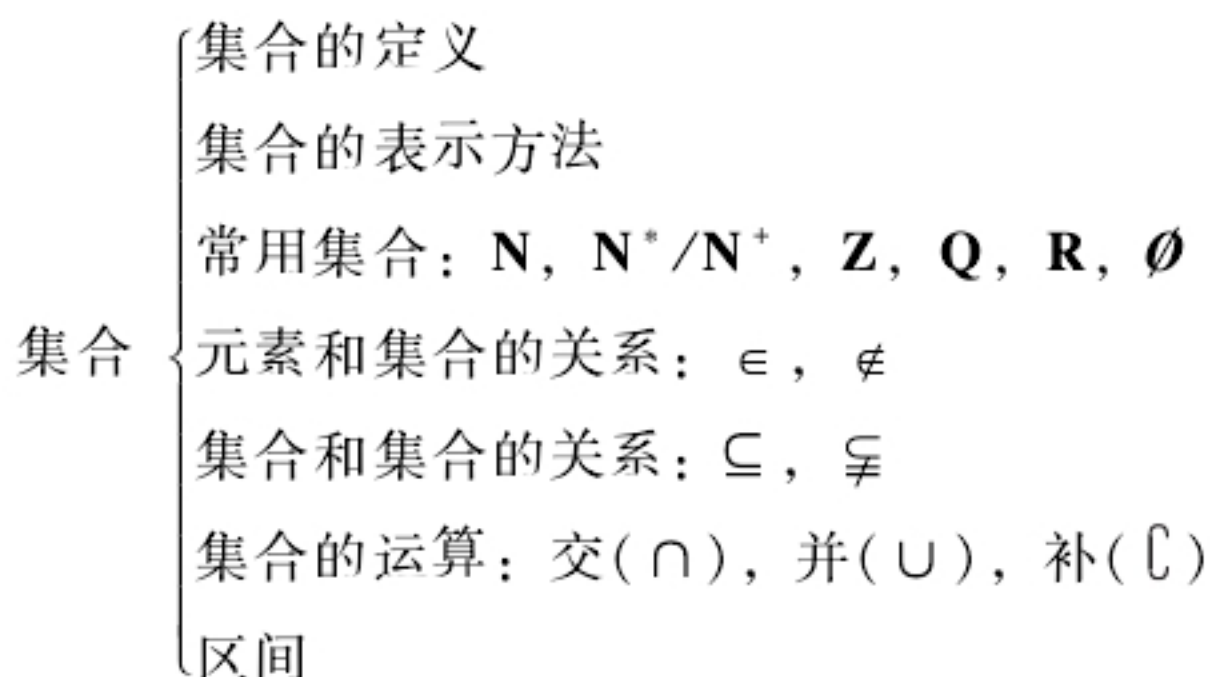
4.2 三角函数的定义及关系	54
4.3 三角函数的诱导公式	60
4.4 正弦函数和余弦函数的图像和性质	65
4.5 正切函数和余切函数的图像和性质	69
自测题	72
* 第五章 反三角函数	75
5.1 反正弦函数和反余弦函数的图像和性质	75
5.2 反正切函数和反余切函数的图像和性质	80
自测题	83
第六章 两角和与差的三角函数	85
6.1 两角和与差的三角函数	86
6.2 二倍角公式	90
6.3 半角公式	91
自测题	94
第七章 数列	96
7.1 数列	96
7.2 等差数列	97
7.3 等比数列	101
自测题	104

第八章 直线	106
8.1 直线的倾斜角和斜率	106
8.2 直线的方程	108
8.3 直线的平行和垂直	111
8.4 两条直线的交点	114
自测题	117
第九章 圆锥曲线	120
9.1 圆	120
9.2 椭圆	123
9.3 双曲线	125
9.4 抛物线	128
自测题	132
* 第十章 数列和函数的极限	134
10.1 数列的极限	135
10.2 函数的极限	139
10.3 连续函数	145
10.4 两个重要极限	149
10.5 无穷小量	152
自测题	157

* 第十一章 导数	160
11.1 导数的概念	161
11.2 导数的运算法则	166
11.3 高阶导数	169
11.4 隐函数的导数	171
11.5 参数函数的导数	174
自测题	178
 附录一 模拟试卷	 181
附录二 基础公式	186

第一章 集 合

本章知识点结构图



1.1 集合的定义

一、基础知识

(1) 集合的定义

- ① 一些元素组成的总体叫作集合.
- ② 用大写字母 $A, B, C \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c \cdots$ 表示元素.

(2) 集合的表示方法

- ① 列举法: 例如, 元素 $-1, 1$ 组成集合 A , $A = \{-1, 1\}$.
- ② 描述法: 例如, “小于 3 的实数” 组成集合 B , $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$.

(3) 常用集合

$\mathbf{N}$ 自然数集 (set of natural numbers) $\mathbf{Z}$ 整数集 (set of integers)
 $\mathbf{Z}^+$ 正整数集 (set of positive integers) $\mathbf{Q}$ 有理数集 (set of rational numbers)
 $\mathbf{R}$ 实数集 (set of real numbers) $\emptyset$ 空集 (empty set)

(4) 元素和集合的关系

属于($\in$), 不属于($\notin$).

例如, 集合 $A = \{a, b, c\}$, a 是集合 A 的元素, a 属于 A , 即 $a \in A$;

集合 $A = \{b, c, d\}$, a 不是集合 A 的元素, a 不属于 A , 即 $a \notin A$.

二、例题

1. 下列选项正确的是 ().

- A. $0 \in \mathbf{R}$ B. $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ C. $-\frac{3}{2} \in \mathbf{Z}$ D. $7 \notin \mathbf{N}$

[答案] A

[详解] B. $\mathbf{Q}$ 是有理数集, $\sqrt{2}$ 是无理数, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

C. $\mathbf{Z}$ 是整数集, $-\frac{3}{2}$ 不是整数, $-\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}$.

D. $\mathbf{N}$ 是自然数集, 7 是自然数, $7 \in \mathbf{N}$.

2. 用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空.

(1) $2 \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 5, 8\}$ (2) $5 \underline{\hspace{1cm}} \{x | x > 1\}$

(3) $3.5 \underline{\hspace{1cm}} \{2, 5, 7\}$ (4) $\frac{3}{2} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q}$

[答案] (1) $\in$; (2) $\in$; (3) $\notin$; (4) $\in$

三、练习(A级)

(一) 选择题

1. 下列选项正确的是 ().

- A. $-2 \notin \mathbf{Z}$ B. $\pi \in \mathbf{Q}$
C. $1 \in \{1, 2\}$ D. $\frac{1}{2} \in \mathbf{N}$

2. 下列选项正确的是 ().

- A. $3.7 \in \mathbf{Z}$ B. $-1 \in \mathbf{N}$
C. $-2 \notin \{1, 2, 3, 6\}$ D. $7 \in \{1, 2, 3, 6\}$

3. 下列选项正确的是 ().

A. $\pi \in \mathbf{Z}$

B. $-5 \in \mathbf{N}$

C. $\pi \notin \mathbf{Q}$

D. $\frac{1}{6} \notin \mathbf{R}$

(二) 填空题

1. 下列数 $\sqrt{7}$, -8 , π , $\sqrt{36}$, 0 , $0.\dot{6}\dot{6}$. 有理数: _____; 无理数: _____.

2. 下列数 $\frac{2}{5}$, 4 , 0.7 , -3 , 0 . 自然数: _____; 整数: _____.

3. 用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空.

(1) 0 _____ $\mathbf{Z}$

(2) -3 _____ $\mathbf{N}$

(3) 3.7 _____ $\mathbf{R}$

(4) $\sqrt{5}$ _____ $\mathbf{N}$

(5) π _____ $\mathbf{Z}$

(6) $-\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{Q}$

(7) a _____ $\{a, b\}$

(8) $\frac{3}{5}$ _____ $\mathbf{Q}$

(9) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{N}$

4. 写出下列集合.

(1) 元素 0 , -1 , 2 , 5 组成的集合: $A =$ _____.

(2) 大于 3 小于 5 的实数组成的集合: $B =$ _____.

(3) 大于 -2 小于 4 的自然数组成的集合: $C =$ _____.

1.2 集合间的关系

一、基础知识

集合和集合的关系

包含于 ($\subseteq$)

$A \subseteq B$, A 是 B 的子集, 读作 “ A 包含于 B ”.

$A \subsetneq B$, A 是 B 的真子集, 读作 “ A 真包含于 B ”, 即 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$.

$A = B$, A 等于 B .

★子集包含这个集合自己, 真子集不包含它自己.

例如, $\{a, b\}$ 的子集有: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

它的真子集有: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$.

二、例题

1. 判断对错

$$(1) 1 \subseteq \{0, 1, 2\} \quad (\quad)$$

$$(2) \{1\} \in \{0, 1, 2\} \quad (\quad)$$

$$(3) \emptyset \subsetneq \{x | x > 1\} \quad (\quad)$$

[答案] (1) $\times$; (2) $\times$; (3) $\checkmark$

[详解] (1) 1 是 $\{0, 1, 2\}$ 里的元素, 应该用 “ $\in$ ”, 所以错误.

(2) $\{1\}$ 是集合, 集合和集合之间不用 “ $\in$ ”, 所以错误.

(3) $\emptyset$ 空集, $\emptyset$ 是 $\{x | x > 1\}$ 的真子集, 正确.

2. 分别写出集合 $\{a, b\}$ 的所有子集和真子集.

[答案] 子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

真子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}$.

★注意 Attention!

$\in, \notin$ 用在元素和集合之间;

$\subseteq, \subsetneq$ 用在集合和集合之间;

有 “ $\{ \}$ ” 是集合, 没有的是元素.

三、练习(A级)

(一) 判断对错

$$1. 5 \subseteq \{x | x < 8\} \quad (\quad)$$

$$2. \{4\} \in \{1, 4\} \quad (\quad)$$

$$3. \frac{1}{6} \in \mathbf{R} \quad (\quad)$$

$$4. \pi \notin \mathbf{Q} \quad (\quad)$$

$$5. \sqrt{7} \in \mathbf{R} \quad (\quad)$$

$$6. \emptyset \in \{2, 5\} \quad (\quad)$$

(二) 选择题

1. 如果 $A = \{1, 4, 5, 6\}$, 那么下列选项正确的是 ().

A. $\{4\} \in A$ B. $4 \subset A$ C. $\{4\} \subseteq A$ D. $\emptyset \notin A$

2. 集合 $\{1, 2, 6\}$ 的子集有 ().

A. 7 个 B. 8 个 C. 9 个 D. 10 个

(三) 填空题

1. 集合 $\{3, 5\}$ 的子集有 _____ 个, 分别是: _____.
2. 集合 $\{3, 5\}$ 的真子集有 _____ 个, 分别是: _____.

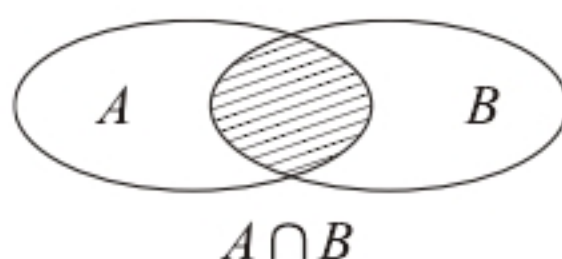
1.3 集合间的运算

一、基础知识

(一) 集合间的运算

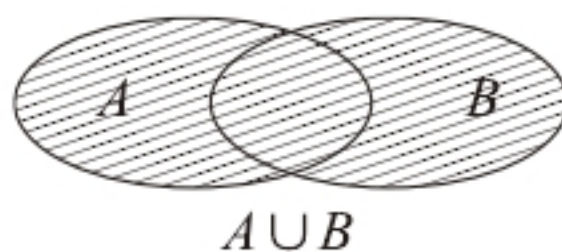
交($\cap$), 并($\cup$), 补($\complement$)

$A \cap B$, A 与 B 的交集, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

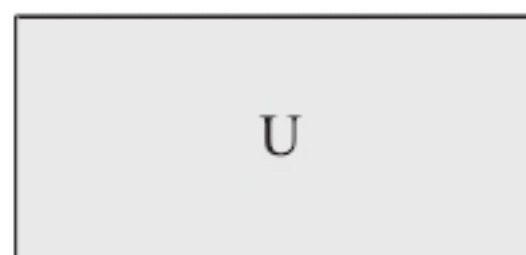
$A \cup B$, A 与 B 的并集, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成.



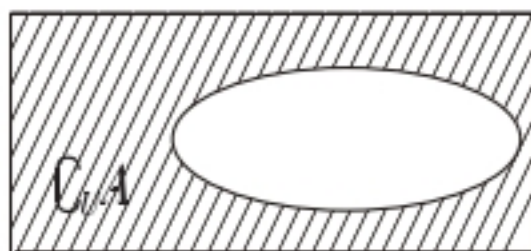
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$\complement_U A$, U 中 A 的补集, 由所有属于 U 却不属于 A 的元素组成.

如果有 A 和 U 两个集合,



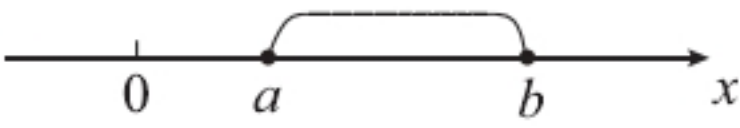
那么 $\complement_U A$ 是:



$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

(二) 区间

如果 a, b 都是实数, 且 $a < b$, 那么:

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	
$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$	

二、例题

1. 设集合 $A = \{2, 3, 8\}$, $B = \{8, 9\}$, 全集 $U = \{2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, 则 $\complement_U A =$ _____; $\complement_U B =$ _____; $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____.

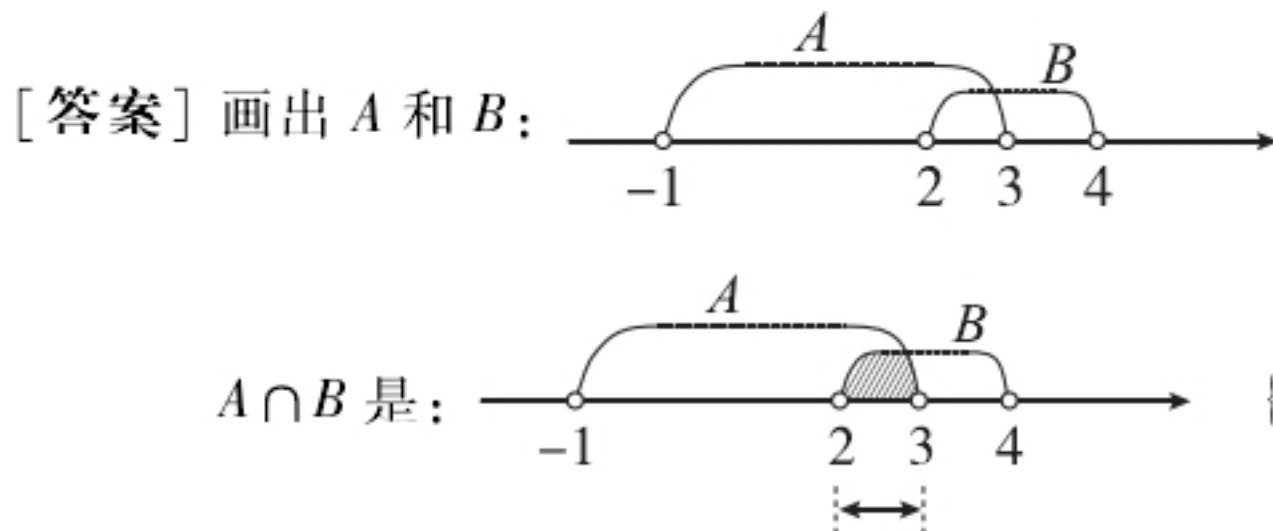
[答案] U 中不属于 A 的有 7, 9, 10, $\complement_U A = \{7, 9, 10\}$;

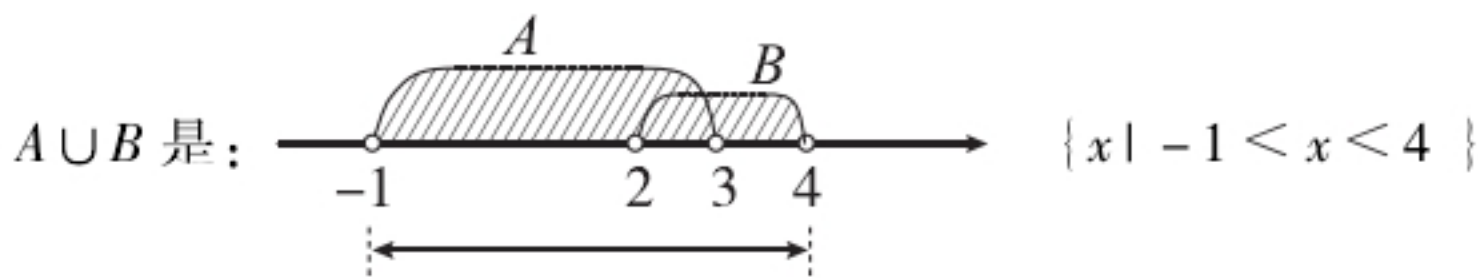
U 中不属于 B 的有 2, 3, 7, 10, $\complement_U B = \{2, 3, 7, 10\}$;

集合 A 和 B 一样的元素是 8, $A \cap B = \{8\}$;

集合 A 和 B 的元素放到一起有 2, 3, 8, 9, $A \cup B = \{2, 3, 8, 9\}$.

2. 设集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____.





三、练习(A级)

(一) 选择题

- 集合 $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $A \cup B = (\quad)$.
A. $\{5\}$ B. $\{3, 4, 6, 7\}$
C. $\{3, 5, 6, 7\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$
- 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = (\quad)$.
A. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
C. $\{2, 4\}$ D. $\{1, 3, 5, 6\}$
- 集合 $A = \{x | x < 4\}$, $B = \{x | x < -2\}$, $A \cup B = (\quad)$.
A. $\{x | x < 4\}$ B. $\{x | x < -2\}$
C. $\emptyset$ D. $\{x | x = -3\}$
- 集合 $A = \{x | x > 8\}$, $B = \{x | x \leq 11\}$, $A \cap B = (\quad)$.
A. $\{x | x \leq 11\}$ B. $(-\infty, 8)$
C. $\{x | 8 < x \leq 11\}$ D. $\{9, 10\}$
- 集合 $A = \{x | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x | 2 < x < 5\}$, $A \cup B = (\quad)$.
A. $(1, 4)$ B. $(2, 5]$
C. $(2, 4]$ D. $(1, 5)$

(二) 填空题

1. 集合 $A = \{3, 4\}$, $B = \{6, 8\}$, $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____.
2. 集合 $A = \{1, 3\}$, $U = \{1, 3, 5, 8\}$, $\complement_U A =$ _____.
3. 集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, e\}$, $U = \{a, b, c, d, e\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) =$ _____.
4. 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid 1 < x \leq 6\}$, $A \cap B =$ _____;

$$A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 集合 $A = \{x | x < 8\}$, $B = \{x | x \geq 3\}$, $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x < 10\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x > 6\}$, $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 集合 $A = \{x | x \leq -2\}$, $B = \{x | x < 3\}$, $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $\complement_B A = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 集合 $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | x > 5\}$, $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $\complement_A B = \underline{\hspace{2cm}}$.